第5講　２次関数とグラフ

§1　関数とその表し方

要点整理 と 公式

要点1 関数と定義域

「関数」……　x の値を決めると，y の値が「　　　　　　」決まるとき，

y は「x の　　　」であるという。

「1次関数」…　y が x を用いて「　　　　　　」（a，b は定数，$a \neq 0$）の形で

表されるとき，y は「　　　　　　　　」という。

（ex）$y=2x+1$，　$y=-3x$

「2次関数」…　y が x を用いて「　　　　　　　　」（a，b，cは定数，$a \neq 0$）の形で

表されるとき，y は「　　　　　　　　」という。

（ex）$y=2x^2+3x+4$，　$y=-2x^2+5x$，　$y=x^2$

x の関数において，x がとりうる値の範囲を「　　　　　」という。

定義域は，関数の式の後に（　　　）で表すことができる。

（ex）$y=-3x+5$　$(-1 \leqq x < 1)$

要点2 関数記号 $f(x)$

y が x の関数であるとき，関数を表す x の式を「関数　　　　」と表す。

$f(x)$ の f は，関数を表す式が変われば異なる文字にする。

（ex）$y=3x+1$　において，$f(x)=3x+1$

$y=2x^2$　において，$g(x)=2x^2$

$y=f(x)$ とあれば，y は x の関数であることを意味する。

$x=a$ における関数 $f(x)$ の値を，「　　　」と表す。

（ex）$f(x)=3x+1$　において，

$x=1$ のときの関数 $f(x)$ の値は＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$x=-2$ のときの関数 $f(x)$ の値は＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

底辺と高さの和が 12 cmの三角形がある。この三角形の底辺の長さを x cm，面積を y cm^2 とすると，y は x の関数である。次の問いに答えよ。

(1)　y を x の式で表せ。

(2)　この関数の定義域を求めよ。

(3)　この関数を $f(x)$ とする。次の値を求めよ。

(i)　$f(4)$　　　(ii)　$f(8)$　　　(iii)　$f(t)$

Point Pickup

関数 $f(x)$ の値

関数 $f(x)$ において，x=● のときの値 f(●) は

x に●を「　　　　」して求める。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ ２乗に比例する関数から２次関数へ

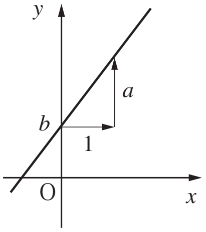
要点整理 と 公式

要点❸ １次関数 $y=ax+b$ のグラフと２次関数 $y=ax^2$ のグラフ

１次関数　$y=ax+b$ のグラフは, a を「　　　　」, b を「　　　　」とする「　　　　」である。

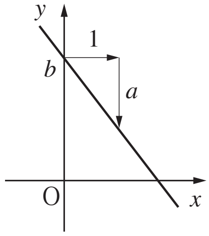
２次関数　$y=ax^2$ のグラフは，原点を「　　　　」とし，y 軸を「　　　　」とする「　　　　」である。放物線の対称軸を，単に「　　　」という。

＜$y=ax+b$ のグラフ＞　　　　＜$y=ax^2$ のグラフ＞



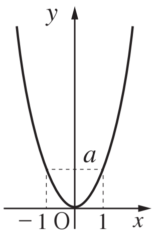
$a>0$ のとき

「　　　　　」



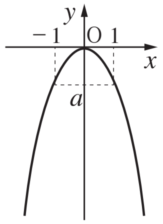
$a<0$ のとき

「　　　　　」



$a>0$ のとき

「　　　　　」



$a<0$ のとき

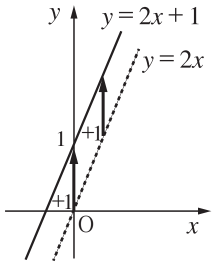
「　　　　　」

要点❹ 平行移動

「平行移動」… 平面上で，あるグラフのすべての点を，一定の向きに一定の距離だけ移動させること。

「x軸方向」…… x 軸の正の向き。

「y軸方向」…… y 軸の正の向き。



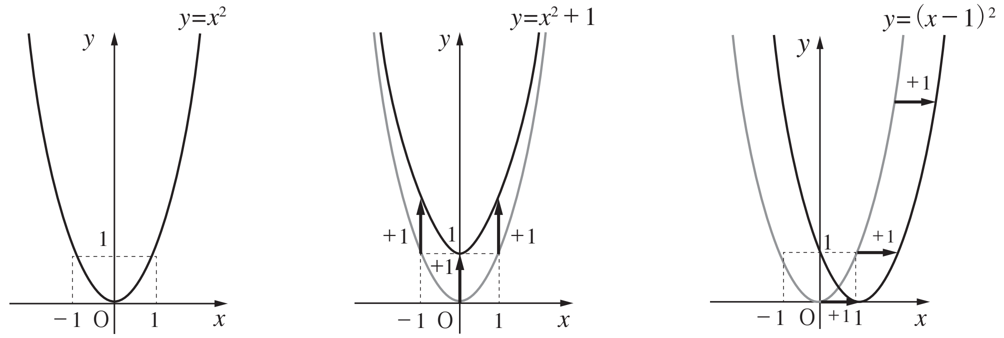
(ex) $y=2x+1$ のグラフは，$y=2x$ のグラフを

「　　　　　」に１だけ「　　　　　」した直線である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点５ 2次関数のグラフの平行移動

$y=x^2$，$y=x^2+1$，$y=(x-1)^2$ のグラフは以下のようになる。



一般に，次のことがいえる。

■ 2次関数 $y=ax^2+q$，$y=a(x-p)^2$ のグラフ

$y=ax^2+q$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを y 軸方向に q だけ平行移動したもの。

$y=a(x-p)^2$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動したもの。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

(1)　次の関数のグラフをかけ。

(i)　$y=\frac{2}{3}x-1$　　　(ii)　$y=2x^2$

(2)　次の2次関数のグラフの頂点と軸を求め，そのグラフをかけ。

(i)　$y=x^2+2$　　　(ii)　$y=2x^2-3$

(iii)　$y=(x-1)^2$　　　(iv)　$y=-2(x+1)^2$

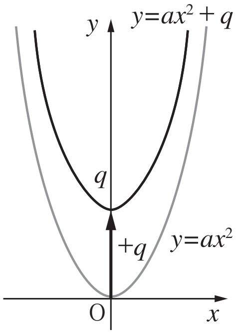
Point Pickup

2次関数　$y=ax^2+q$　のグラフ

$\Longrightarrow$　$y=ax^2$ のグラフを，______軸方向に______だけ

平行移動したもの。

頂点は点__________　　軸は__________(y軸)

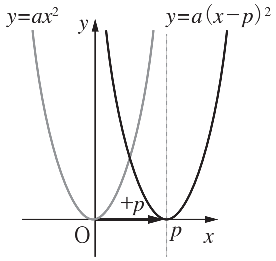


2次関数　$y=a(x-p)^2$　のグラフ

$\Longrightarrow$　$y=ax^2$ のグラフを，______軸方向に______だけ

平行移動したもの。

頂点は点__________　　軸は__________



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ２次関数のグラフ

要点整理 と 公式

要点６ ２次関数　$y=a(x-p)^2+q$　のグラフ

$y=2x^2$ … ①

$y=2(x-2)^2$ … ②

$y=2(x-2)^2+1$ … ③

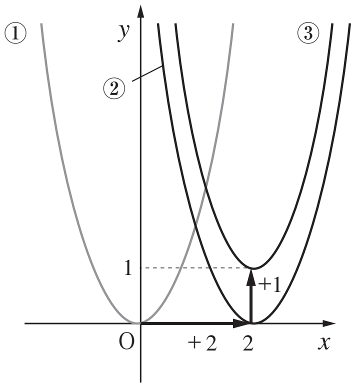
のグラフについて，

②のグラフは，①のグラフを

x 軸方向に 2 だけ平行移動したものである。

さらに，③のグラフは，②のグラフを

y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。



よって，$y=2(x-2)^2+1$ のグラフは $y=2x^2$ のグラフを

x 軸方向に 2，y 軸方向に 1

だけ平行移動したものである。

一般に，次のことがいえる。

■ ２次関数　$y=a(x-p)^2+q$　のグラフ

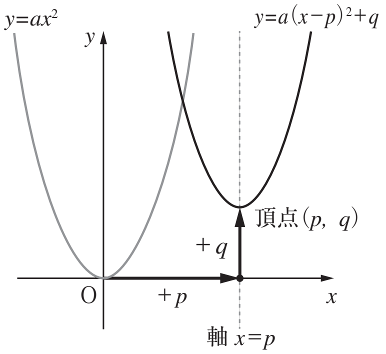
$y=a(x-p)^2+q$　のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを

x 軸方向に p，y 軸方向に q

だけ平行移動したものである。

頂点は　点 $(p,\ q)$

軸は　　直線　$x=p$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

次の関数のグラフの頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=(x-1)^2+2$　　(2)　$y=2(x+3)^2-1$

(3)　$y=-(x-2)^2-1$　　(4)　$y=-\dfrac{1}{2}(x+1)^2+5$

Point Pickup

2次関数　$y=a(x-p)^2+q$　のグラフのかき方

①　座標平面上に，頂点（　　　　　）をとる。

②　切片（________のときの y の値）をとる。

③　グラフの凸方向に注意してグラフをかく。

$a>0$ のときグラフは________　　$a<0$ のときグラフは________

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 平方完成と２次関数のグラフ

要点整理 と 公式

要点 7 平方完成と $y=x^2+bx+c$ の変形

２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフをかくためには，この式を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形すればよい。この変形を「　　　　　　」という。

例えば $x^2-6x+9=(x-3)^2$ であることより，$x^2-6x=(x-3)^2-9=(x-3)^2-3^2$ である。

同様に $x^2-2px+p^2=(x-p)^2$ より，$x^2-2px=(x-p)^2-p^2$ と変形できる。

(ex)　$x^2-4x=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

よって，$y=x^2+bx+c=\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{b}{2}\right)^2+c$ と変形できる。

要点 8 $y=ax^2+bx+c$ の変形とグラフ

２次式 ax^2+bx を平方完成するためには，x^2 の係数 a を「　　　　　　　　」必要がある。

その後，(　　　)の中で平方完成する。

(ex)　$2x^2-4x=$

よって，$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x\right)+c$ と変形し，(　　)の中を平方完成することで，

$y=ax^2+bx+c$ を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形することができる。

(ex)　$y=2x^2+8x+3$

$=2(x^2+4x)+3$

$=2\{(x+2)^2-4\}+3$

$=2(x+2)^2-8+3$

$=2(x+2)^2-5$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{メモ}

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

(1)　次の2次関数を　$y=(x-p)^2+q$　の形に変形せよ。

(i)　$y=x^2+6x$　　(ii)　$y=x^2+x$　　(iii)　$y=x^2-4x+5$

(2)　次の2次関数を　$y=a(x-p)^2+q$　の形に変形せよ。

(i)　$y=2x^2+4x$　　(ii)　$y=-x^2-14x$

(iii)　$y=2x^2-2x$　　(iv)　$y=-3x^2-9x$

(3)　次の2次関数のグラフをかけ。

(i)　$y=x^2-6x+6$　　(ii)　$y=-x^2-4x+2$

Point Pickup

平方完成の手順

2次式　ax^2+bx+c　を平方完成する手順は以下。

①　x^2とxの項をx^2の係数aでくくる。

②　(　　　)の中の2次式を　$(x-p)^2-p^2$　の形に変形する。

$$x^2+●x=\left(x+\frac{●}{2}\right)^2-\left(\frac{●}{2}\right)^2$$

このとき，外側の(　　)は{　　}となる。

③　{　　}の前の数aを{　　}の中に分配し，{　　}をはずす。

④　整理して　$y=a(x-p)^2+q$　の形にする。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　確認テスト

1　$f(x)=-2x+5$　において，$f(1)=$ ア ，$f(-2)=$ イ　である。

2　次の２次関数のグラフの頂点の座標と軸の方程式をそれぞれ求めよ。

(1)　$y=x^2+1$　　頂点(ウ , エ)　　軸 $x=$ オ

(2)　$y=2(x-3)^2+4$　　頂点(カ , キ)　　軸 $x=$ ク

(3)　$y=-2(x+1)^2-2$　　頂点($-$ ケ , $-$ コ)　　軸 $x=-$ サ

(4)　$y=x^2+4x$　　頂点($-$ シ , $-$ ス)　　軸 $x=-$ セ

(5)　$y=-2x^2+8x$　　頂点(ソ , タ)　　軸 $x=$ チ

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　2次関数とグラフ

1

(1)　$y=\dfrac{1}{2}\cdot x\cdot(12-x)=6x-\dfrac{1}{2}x^2$　　よって　$y=-\dfrac{1}{2}x^2+6x$

(2)　底辺の長さ，高さはともに正より　$x>0$　かつ　$12-x>0$

　　よって定義域は　$0<x<12$

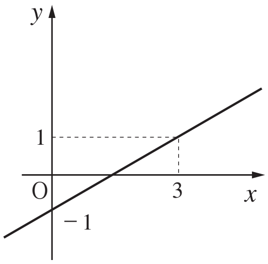
(3)　$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+6x$

　　(i)　$f(4)=-\dfrac{1}{2}\cdot 4^2+6\cdot 4=16$　　(ii)　$f(8)=-\dfrac{1}{2}\cdot 8^2+6\cdot 8=16$

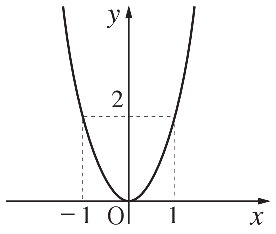
　　(iii)　$f(t)=-\dfrac{1}{2}t^2+6t$

2

(1)　(i)



(ii)

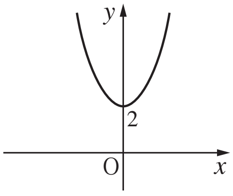


(2)　(i)　頂点(0，2)，軸　$x=0$　　(ii)　頂点(0，−3)，軸　$x=0$

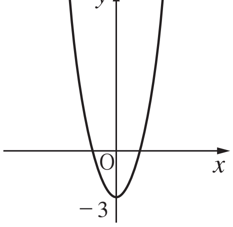
　　(iii)　頂点(1，0)，軸　$x=1$　　(iv)　頂点(−1，0)，軸　$x=-1$

　　グラフは以下

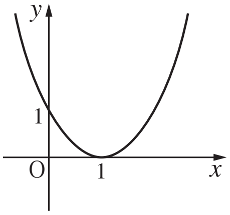
(i)



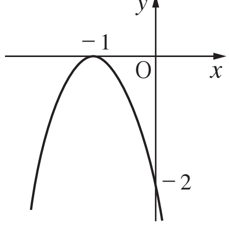
(ii)



(iii)



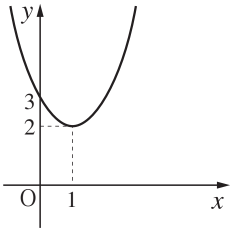
(iv)



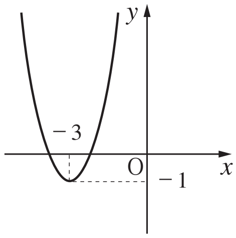
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

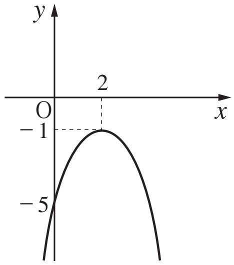
(1)　頂点 $(1,\ 2)$



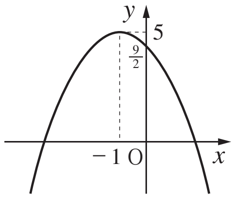
(2)　頂点 $(-3,\ -1)$



(3)　頂点 $(2,\ -1)$



(4)　頂点 $(-1,\ 5)$



4

(1)　(i)　$y=x^2+6x$

$=(x+3)^2-3^2$

$=(x+3)^2-9$

(ii)　$y=x^2+x$

$=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

(iii)　$y=x^2-4x+5$

$=(x-2)^2-2^2+5$

$=(x-2)^2+1$

(2)　(i)　$y=2x^2+4x$

$=2(x^2+2x)$

$=2\{(x+1)^2-1\}$

$=2(x+1)^2-2$

(ii)　$y=-x^2-14x$

$=-(x^2+14x)$

$=-\{(x+7)^2-49\}$

$=-(x+7)^2+49$

(iii)　$y=2x^2-2x$

$=2(x^2-x)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$=2\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}$$

$$=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

(iv)　$y=-3x^2-9x$

$$=-3(x^2+3x)$$

$$=-3\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}$$

$$=-3\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}$$

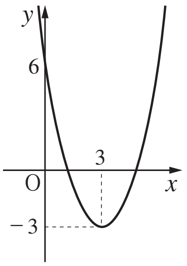
(3)　(i)　$y=x^2-6x+6$

$$=(x-3)^2-9+6$$

$$=(x-3)^2-3$$

頂点は$(3,\ -3)$

よってグラフは右図



(ii)　$y=-x^2-4x+2$

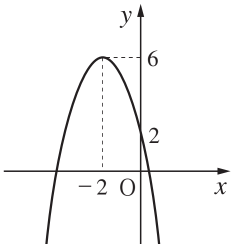
$$=-(x^2+4x)+2$$

$$=-\{(x+2)^2-4\}+2$$

$$=-(x+2)^2+6$$

頂点は$(-2,\ 6)$

よってグラフは右図



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　確認テスト

1　$f(x)=-2x+5$　において，$f(1)=$ ア ，$f(-2)=$ イ 　である。

2　次の２次関数のグラフの頂点の座標と軸の方程式をそれぞれ求めよ。

(1)　$y=x^2+1$　　頂点(ウ , エ)　　軸 $x=$ オ

(2)　$y=2(x-3)^2+4$　　頂点(カ , キ)　　軸 $x=$ ク

(3)　$y=-2(x+1)^2-2$　　頂点($-$ ケ , $-$ コ)　　軸 $x=-$ サ

(4)　$y=x^2+4x$　　頂点($-$ シ , $-$ ス)　　軸 $x=-$ セ

(5)　$y=-2x^2+8x$　　頂点(ソ , タ)　　軸 $x=$ チ

｛解答｝

1　ア　3　　イ　9

2　(1)　ウ　0　　エ　1　　オ　0

(2)　カ　3　　キ　4　　ク　3

(3)　ケ　1　　コ　2　　サ　1

(4)　シ　2　　ス　4　　セ　2

(5)　ソ　2　　タ　8　　チ　2

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。